# PART2 速度と道のり

## 要点整理と公式

### 要点 ① 数直線上を運動する点の速度と道のり

数直線上を運動する点Pの，時刻 $t$ における座標を $x=f(t)$，速度 $v$ とすると，

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

と表される。よって，$t=a$ から $t=b$ までの点Pの位置の変化量は

$$f(b)-f(a)=[f(t)]_a^b=\int_a^b f'(t)dt=\int_a^b vdt$$

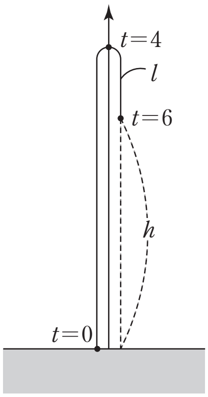
で求めることができる。

$t=a$ から $t=b$ までに点Pが移動した距離，すなわち「　　　」を $l$ とすると

$$l=\int_a^b v\ dt$$

である。$|v|$ は速度 $v$ の絶対値，すなわち速さである。

(ex) 時刻 $t$ における速度が $v=40-10t$ (m/s) となるように地上から真上に打ち上げられた物体の，6秒後の高さを $h$，物体が動いた道のりを $l$ とすると




$$h=\int_0^6 vdt=\int_0^6(40-10t)dt$$

$$=\left[40t-5t^2\right]_0^6=60\ \text{(m)}$$

$0\leqq t\leqq$　のとき $v\geqq 0$

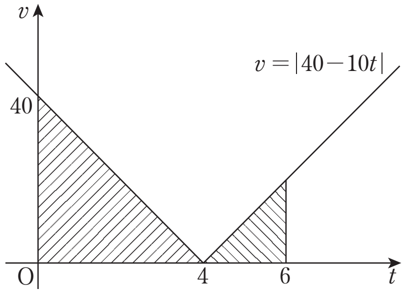
　$\leqq t\leqq 6$ のとき $v\leqq 0$

$$l=\int_0^6|v|dt=\int_0^4(40-10t)dt+\int_4^6(-40+10t)dt$$

$$=\left[40t-5t^2\right]_0^4+\left[-40t+5t^2\right]_4^6$$

$$=80+20=100\ \text{(m)}$$

道のり $l$ は，右図斜線部分2ヶ所の和に等しい。



## 要点② 平面上を運動する点の速度と道のり

座標平面上で，曲線 $C$ 上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 $t$ の関数として

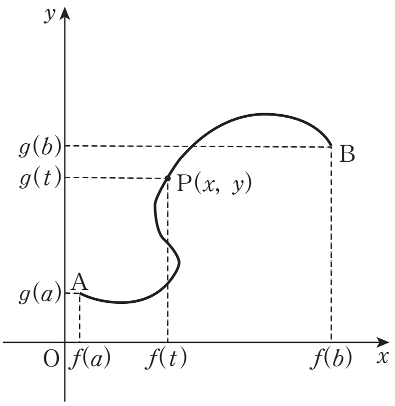
$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

と表されるとする。$t=a$ から $t=b$ までの点Pの道のり $l$ は，点 $\mathrm{A}(f(a),\ g(a))$ から点 $\mathrm{B}(f(b),\ g(b))$ までの曲線の長さに等しい。

よって，曲線の長さの公式より

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

である。




点Pの速度を $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と表すと，点Pの速度の大きさ，すなわち速さは

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

であるから，道のり $l$ は次のように表される。

$$l=\int_a^b|\vec{v}|\,dt$$

(ex) 座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 $t$ の関数として

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t\qquad (r>0)$$

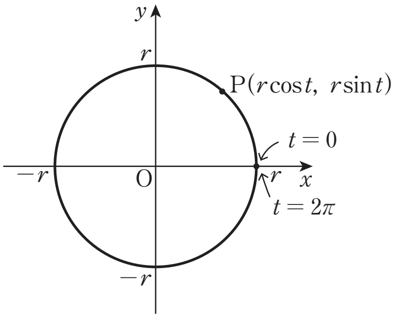
と表されているとき，点Pが時刻 $t=0$ から $t=2\pi$ までに動く道のりを $l$ とすると

$\dfrac{dx}{dt}=-r\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=r\cos t$ より

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{2\pi}r\,dt=\big[rt\big]_0^{2\pi}=2\pi r$$



**2** (1) 数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度が $v=\cos t$ であるとき，$t=0$ から $t=2\pi$ までの点Pの位置の変化量 $s$, および点Pの通過する道のり $l$ を求めよ。

(2) 座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が $x=\dfrac{1}{2}t^2$，$y=\dfrac{1}{3}t^3$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までの点Pの動く道のり $l$ を求めよ。

## Point Pickup

**直線上を運動する点の道のり**

数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度を $v$ とすると，$t=a$ から $t=b$ までの点Pの動く道のり $l$ は

$$l=\int_a^b |v|dt$$

**平面上を運動する点の道のり**

座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 $t$ の関数として

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

と表されるとき，$t=a$ から $t=b$ までの点Pの動く道のり $l$ は

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b |\vec{v}|dt$$

# 第22講 PART2 確認問題

**1** 数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度が $v=\sin t$ であるとき，$t=0$ から $t=2\pi$ までの点Pの位置の変化量を $s$，点Pの通過する道のりを $l$ とすると，

$s=$ ア ，$l=$ イ

である。

**2** 座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が $x=t^3$，$y=3t^2$ で表されるとき，$t=0$ から $t=1$ までの点Pの動く道のりを $l$ とすると，

$$l=\int_0^1 \boxed{\text{ウ}}\,dt$$

と表される。

よって，$l=$ エ $\sqrt{\text{オ}}$ − カ である。

ウ は下の①～④のうちから選べ。

① $\sqrt{t^2+4}$　② $t\sqrt{t+3}$

③ $t\sqrt{t^2+4}$　④ $3t\sqrt{t^2+4}$

# PART2 速度と道のり

**2** (1) 数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度が $v=\cos t$ であるとき，$t=0$ から $t=2\pi$ までの点Pの位置の変化量 $s$, および点Pの通過する道のり $l$ を求めよ。

(2) 座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が $x=\dfrac{1}{2}t^2$，$y=\dfrac{1}{3}t^3$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までの点Pの動く道のり $l$ を求めよ。

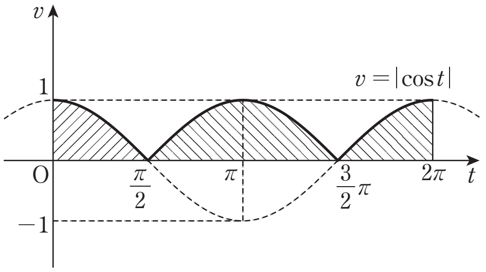
**[解答]**

(1) 点Pの位置の変化量は

$$s=\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^{2\pi}=0$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi\leqq t\leqq 2\pi$ のとき $\cos t\geqq 0$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ のとき $\cos t\leqq 0$




よって，点Pの通過する道のりは

$$l=\int_0^{2\pi}|\cos t|\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(-\cos t)\,dt+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos t\,dt$$

$$=\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}+\Big[\sin t\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}=1-(-2)+1=4$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=t$，$\dfrac{dy}{dt}=t^2$ より

$$l=\int_0^2\sqrt{t^2+(t^2)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{t^2(t^2+1)}\,dt=\int_0^2 t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$t^2+1=u$ とおくと　$2t\,dt=du$

| $t$ | $0\ \to\ 2$ |
|---|---|
| $u$ | $1\ \to\ 5$ |

よって

$$l=\int_0^2 t\sqrt{t^2+1}\,dt=\int_0^2\frac{1}{2}\sqrt{t^2+1}\cdot 2t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^5\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^5=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$$

# 第22講　PART2 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：0，イ：4

**[解説]**

点Pの位置の変化量は，

$$s=\int_0^{2\pi}\sin t\,dt \quad \text{[A]}$$

$$=\left[-\cos t\right]_0^{2\pi}$$

$$=-1-(-1)$$

$$=\mathbf{0}$$

[A]　数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度を $v$ とする。
$t=a$ から $t=b$ までの点Pの位置の変化量 $s$ は，

$$s=\int_a^b v\,dt$$

$0\leqq t\leqq\pi$ のとき，$\sin t\geqq 0$

$\pi\leqq t\leqq 2\pi$ のとき，$\sin t\leqq 0$

よって，点Pの運動する道のりは，

$$l=\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt \quad \text{[B]}$$

$$=\int_0^{\pi}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)\,dt$$

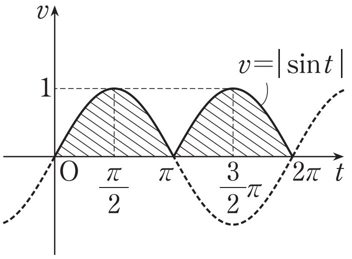
$$=\left[-\cos t\right]_0^{\pi}+\left[\cos t\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=1-(-1)+1-(-1)$$

$$=\mathbf{4}$$

[B]　数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度を $v$ とする。
$t=a$ から $t=b$ までの点Pの動く道のり $l$ は，

$$l=\int_a^b |v|\,dt$$



## 2

**[正解]** ウ：④，エ：5，オ：5，カ：8

**[解説]**

$\dfrac{dx}{dt}=3t^2$，$\dfrac{dy}{dt}=6t$ より，

$$l=\int_0^1\sqrt{(3t^2)^2+(6t)^2}\,dt \quad \text{[C]}$$
$$=\int_0^1\sqrt{9t^4+36t^2}\,dt$$
$$=\boldsymbol{\int_0^1 3t\sqrt{t^2+4}\,dt}$$

$t^2+4=u$ とおくと，

$$2tdt=du$$

| $t$ | $0$ | $\to$ | $1$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $u$ | $4$ | $\to$ | $5$ |

よって，

$$l=\int_0^1\frac{3}{2}\sqrt{t^2+4}\cdot 2tdt$$
$$=\int_4^5\frac{3}{2}\sqrt{u}\,du$$
$$=\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^5$$
$$=5^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}$$
$$=5\sqrt{5}-8$$

[C]　平面上を運動する点の道のり
座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 $t$ の関数として
$x=f(t)$，$y=g(t)$
と表されるとき，$t=a$ から $t=b$ までの点Pの動く道のり $l$ は，

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_a^b|\vec{v}|dt$$